

Chapitre 3

Variables Aléatoires Discrètes à une Seule Dimension

Les variables aléatoires discrètes

1. Définition

Une variable aléatoire est définie lorsqu'on associe à chacun des résultats possibles d'une expérience aléatoire un nombre réel x .

Autrement dit,

C'est une application X de Ω dans \mathbb{R} , i.e :

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\omega_i \rightarrow X_i = X(\omega_i)$$

Une variable aléatoire est dite discrète si elle prend des valeurs entières.

Les variables aléatoires discrètes

Exemple

Considérons l'expérience aléatoire suivante :

« Lancement d'une pièce de monnaie »

Soit X une variable aléatoire définie comme suit :

$$\begin{cases} X = 0 & \text{Si le résultat est pile} \\ X = 1 & \text{Sinon} \end{cases}$$

Alors on a :

$$X : \Omega = \{P, F\} \rightarrow \{0, 1\}$$

$$\omega_i \rightarrow X_i = X(\omega_i)$$

$$\text{Si } \omega_1 = P \text{ alors } X(\omega_1) = X(P) = 0$$

$$\text{Si } \omega_2 = F \text{ alors } X(\omega_2) = X(F) = 1$$

Les variables aléatoires discrètes

2. Loi de probabilité (distribution)

La loi (ou distribution) de probabilité d'une variable aléatoire X est une fonction qui associe les valeurs possibles de X à la probabilité qui leur correspond.

Autrement dit, C est l'ensemble des valeurs de X et les probabilités correspondantes, i.e :

$$\{(x_i, p_i) / i = 1, 2, \dots, n\}$$

$$\text{Avec : } p_i = P[X(\omega_i) = x_i] \quad \text{où} \quad p_i = p[X = x_i]$$

$$\text{On a : } \sum_{i=1}^n p_i = 1$$

Les variables aléatoires discrètes

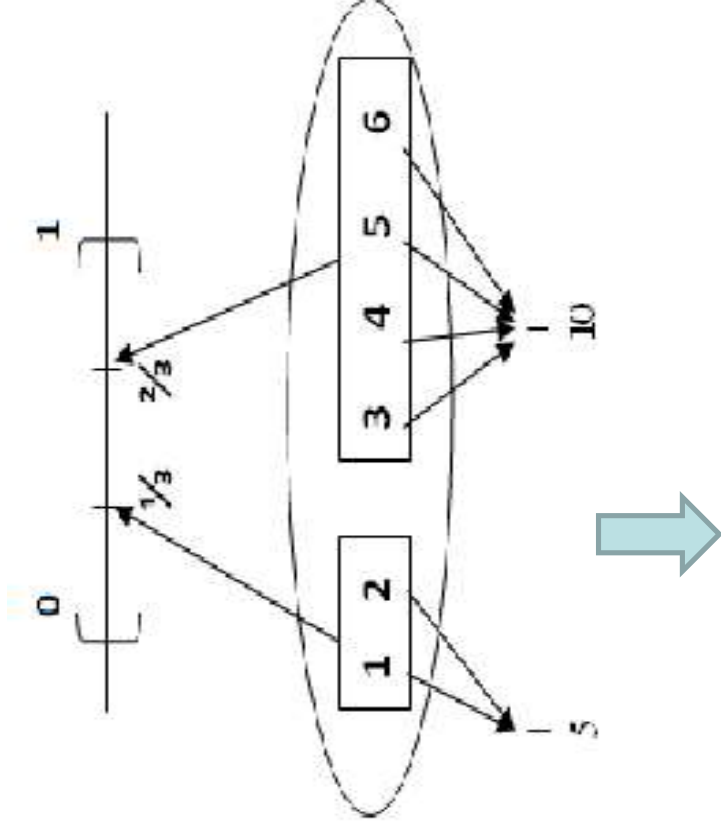
Exemple : Dans l'exemple précédent, la probabilité d'avoir pile est : 0,5 et celle d'avoir face est 0,5. Le tableau suivant donne la loi de probabilité de variable aléatoire étudiée.

Résultat de l'expérience	Pile	Face
Les valeurs associées aux résultats possibles x_i	0	1
Les probabilités de réalisation des résultats $P(X=x_i)$	0,5	0,5

Expérience aléatoire : Lancement d'une pièce de monnaie

Exemple : Soit l'expérience aléatoire suivante : « **Lancement d'un dé** ». Supposons qu'un individu reçoit **5** si l'un des numéros 1 ou 2 est obtenu, et 10 si l'un des numéros 3,4,5 ou 6 est le résultat.

Les variables aléatoires discrètes



Résultat de l'expérience	(1,2)	(3,4,5,6)
Les valeurs associées aux résultats possibles x_i	5	10
Les probabilités de réalisation des résultats $P(X=x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

Les variables aléatoires discrètes

3. Fonctions de répartition

La fonction de répartition F d'une variable aléatoire X est définie comme suit :

$$F : I \rightarrow [0,1]$$

$$x_i \mapsto F(x_i) = p[X \leq x_i] = p[X = x_1] + \dots + p[X = x_i]$$

où $I \subset \mathbb{R}$

$$F(x_i) = p_1 + p_2 + \dots + p_i = \sum_{k=1}^i p_k$$

Propriétés

- ☐ F est une fonction positive, croissante et prend ses valeurs dans $[0,1]$
- ☐ $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$
- ☐ F est continue à gauche $[x_i, x_{i+1}]$
- ☐ F reste constante sur l'intervalle

Les variables aléatoires discrètes

Exemple :

Soit X une variable aléatoire de loi de probabilité par le tableau suivant :

X_i	1	2	3	4
$P_i = P(X=x_i)$	0,2	0,3	0,4	0,1
$F(x_i)$	0,2	0,5	0,9	1

Les variables aléatoires discrètes

4. Caractéristique d'une variable aléatoire discrète

4.1 Espérance mathématique

L'espérance mathématique d'une variable aléatoire X de loi de probabilité (x_i, p_i) pour $i = 1, \dots, n$, notée $E(X)$, est donnée par la quantité suivante:

$$E(X) = \sum_{i=1}^n P(X = x_i) \times x_i = \sum_{i=1}^n p_i \times x_i \quad (9)$$

Exemple :

Considérons deux joueurs A et B à pile ou face.

Si le résultat de lancement est pile, le joueur A paye 2Dh au joueur B, sinon, le joueur B paye 4Dh au joueur A.

Calculer l'espérance mathématique de gain du joueur A.

Les variables aléatoires discrètes

Solution

Soit X une variable aléatoire qui désigne le gain du joueur A.

La loi de probabilité de cette variable aléatoire est comme suit :

Expérience aléatoire : lancement d'une pièce de monnaie

Résultat de l'expérience (espace fondamental Ω)	Pile	face
Les valeurs associées aux résultats possibles x_i	-2	4
Les probabilités associées aux résultats possibles $P_i = P(X=x_i)$	0,5	0,5

Donc l'espérance mathématique est égale à :

$$E(X) = \sum_{i=1}^2 P(X = x_i) \times x_i = -2 \times 0,5 + 4 \times 0,5 = -1 + 2 = 1$$

Les variables aléatoires discrètes

5. Propriétés de l'espérance

Soient X et Y deux variables aléatoires, a et b deux nombres réels.

$$\bullet E(aX + b) = aE(X) + b$$

(8)

$$\bullet E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

(9)

$$\bullet E(X - Y) = E(X) - E(Y)$$

(10)

Les variables aléatoires discrètes

6. La variance et l'écart type

La variance d'une variable aléatoire X de loi de probabilité

(x_i, p_i) pour $i = 1, \dots, n$, notée $V(X)$, est donnée par la quantité suivante:

$$\begin{aligned} V(X) &= E[X - E(X)]^2 \\ &= \sum_{i=1}^n p_i (x_i - E(X))^2 \\ &= \sigma_X^2 \end{aligned} \tag{11}$$

L'écart-type d'une variable aléatoire est donné par la formule suivante : $\sqrt{\sigma_X}$

Les variables aléatoires discrètes

7. Propriété de la variance

$$V(aX + b) = a^2 V(x) \quad (13)$$

Exemple :

Considérons deux joueurs A et B à pile ou face. Si le résultat de lancement est pile , le joueur A paye 2Dh au joueur B, sinon , le joueur B paye 4Dh au joueur A.

Calculer la variance de gain du joueur A.

Les variables aléatoires discrètes

Solution: Soit X une variable aléatoire qui désigne le gain du joueur A.

La loi de probabilité de cette variable aléatoire est comme suit :

Résultat de l'expérience (espace fondamental Ω)	Pile	face
Les valeurs associées aux résultats possibles x_i	-2	4
Les probabilités associées aux résultats possibles $P_i = P(X=x_i)$	0,5	0,5

Expérience aléatoire : lancement d'une pièce de monnaie

Donc l'espérance mathématique est égale à :

$$E(X^2) = \sum_{i=1}^2 P(X = x_i) \times x_i^2 = 0,5 \times 4 + 0,5 \times 16 = 2 + 8 = 10$$

$$\text{Alors:} \quad V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 10 - 1 = 9$$

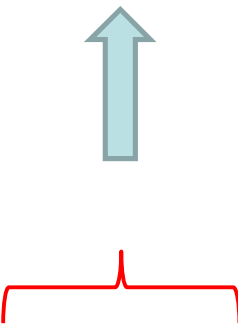
Moments d'ordre supérieur à deux

- Le moment d'ordre k de X est l'espérance mathématique de X^k , i.e:

$$m_k = E(X^k) = \sum_{i=1}^n P(X = x_i) \times x_i^k = \sum_{i=1}^n p_i \times x_i^k$$

- Le moment d'ordre k de X est l'espérance mathématique de X^k , i.e:

$$m_k = E(X^k) = \sum_{i=1}^n P(X = x_i) \times [x_i - E(X)]^k = \sum_{i=1}^n p_i \times [x_i - E(X)]^k$$

- Le moment d'ordre 1 : $m_1 = E(X)$
 - Le moment d'ordre 2: $m_2 = E(X^2)$
- 
 $V(X) = m_2 - m_1^2$


Fonction génératrice des moments

- La fonction génératrice des moments d'une variable aléatoire X est la fonction :

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \sum_{i=1}^n e^{tx_i} p\{X = x_i\}$$

➤ Sachant que :

$$e^X = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{X^k}{k!} = \frac{X}{1!} + \frac{X^2}{2!} + \dots + \frac{X^n}{n!} + \dots$$


$$e^{tX} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(Xt)^k}{k!} = \frac{(Xt)}{1!} + \frac{(Xt)^2}{2!} + \dots + \frac{(Xt)^n}{n!} + \dots$$

- Alors:

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = E\left(\frac{(Xt)}{1!} + \frac{(Xt)^2}{2!} + \dots + \frac{(Xt)^n}{n!} + \dots\right)$$

Moments d'ordre supérieur à deux

$$M_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} E(X^k) = \frac{t}{1!} E(X) + \frac{t^2}{2!} E(X^2) + \dots + \frac{t^n}{n!} E(X^n) + \dots$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} m_k = \frac{t}{1!} m_1 + \frac{t^2}{2!} m_2 + \dots + \frac{t^n}{n!} m_n + \dots \end{aligned}$$

Exemple d'application

Un responsable de Maroc-Telecom a dénombré la demande journalière concernant l'annulation du téléphone fixe pour une période de 200 jours. La distribution obtenue se présente comme suit :

1. Déterminer la loi de probabilité de X
2. Calculer $E(X)$ et $V(X)$
3. Quelle est la probabilité d'obtenir une demande journalière dans l'intervalle

$$[E(X) - \sigma(X), E(X) + \sigma(X)]$$

Demande d'annulation (X)	Nombre de jours
0	14
1	28
2	36
3	60
4	38
5	14
6	10

Exemple d'application

a)

x_i	0	1	2	3	4	5	6
p_i	0.07	0.14	0.18	0.3	0.19	0.07	0.05

b) $E(X) = 0.14 + 2 \times 0.18 + 3 \times 0.3 + 4 \times 0.19 + 5 \times 0.07 + 6 \times 0.05$
 $= 2.81$

$$\longrightarrow [E(X)]^2 = (2.81)^2 = 7.8961$$

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$[E(X)]^2 = (2.81)^2 = 7.8961 \quad \longrightarrow \quad E(X^2) = 0.14 \times 1 + 0.18 \times 4 + 0.3 \times 9$$

$$+ 0.19 \times 16 + 0.07 \times 25 + 0.05 \times 36$$

$$= 10.15.$$

Donc : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = 1.5013$

Exemple d'application

c)

$$[E - \sigma, E + \sigma] = [1.3087; 4.3113]$$

$$\begin{aligned} p(1.3087 \leq X \leq 4.3113) &= F(4.3113) - F(1.3087) \\ &= 0.18 + 0.3 + 0.19 \\ &= 0.67. \end{aligned}$$